

Zur Theorie des p-n-Übergangs
bei Berücksichtigung der Rekombination im Übergangsgebiet

DISSERTATION

zur Erlangung der Doktorwürde
der Philosophischen Fakultät
der Philipps-Universität zu Marburg

Vorgelegt von

Hilmar Diehl

aus Oberroßbach

Marburg 1962

Angenommen am 21. 5. 1962

Referent: Prof. Dr. O. MADELUNG

Korreferent: Prof. Dr. H. WOLTER

Tag der mündlichen Prüfung: 11. 7. 1962

Zur Theorie des p-n-Übergangs bei Berücksichtigung der Rekombination im Übergangsgebiet

Von H. DIEHL

Aus dem Institut für Struktur der Materie der Universität Marburg a. d. Lahn

(Z. Naturforschg. 17 a, 889—899 [1962]; eingegangen am 8. August 1962)

Bisher zur Theorie des p-n-Übergangs erschienene Arbeiten gehen von der Annahme aus, daß die elektrochemischen Potentiale im Übergangsgebiet nahezu konstant sind. Damit ist der Gültigkeitsbereich dieser Theorien auf große Diffusionslängen beschränkt, ohne daß jedoch eine genauere Grenze angegeben werden konnte. Eine solche Angabe wird durch die vorliegende Arbeit ermöglicht. Ausgehend von den Stromgleichungen für Elektronen und Löcher wird ein allgemeiner Formalismus entwickelt, der zu einem geschlossenen Ausdruck für die elektrochemischen Potentiale führt. Diese Überlegungen werden auf den abrupten symmetrischen p-n-Übergang spezialisiert und für ein konkretes Beispiel numerisch ausgewertet. Es zeigt sich, daß die Anwendbarkeit der obengenannten Theorien auf Diffusionslängen begrenzt ist, die größer sind als die Breite des Übergangsgebietes im unbelasteten Fall. Außerdem wird die Änderung der Strom-Spannungs-Charakteristiken mit abnehmender Diffusionslänge diskutiert und so die Verbindung zu dem in der Literatur bekannten Grenzfall verschwindender Diffusionslänge hergestellt. Die durchgeführten Untersuchungen umfassen die früheren Rechnungen als Spezialfälle und zeigen im wesentlichen Übereinstimmung mit deren Ergebnissen.

Die ersten theoretischen Untersuchungen des p-n-Übergangs stammen von SHOCKLEY¹. Sie beschränken sich auf den Fall geringer Rekombination, die im Übergangsgebiet vernachlässigt wird. Die durchgeführten Rechnungen liefern den Strom

$$i = i_s (e^{qV/(kT)} - 1);$$

i_s ist der Sättigungsstrom bei Sperrbelastung, q die Elementarladung, V die angelegte Spannung, k die Boltzmann-Konstante, T die absolute Temperatur.

Die Strom-Spannungs-Charakteristik eines p-n-Übergangs in Germanium bei Zimmertemperatur wird durch diese Theorie gut beschrieben. Gehen wir jedoch zu tiefen Temperaturen über oder be-

trachten einen p-n-Übergang in Silicium, so zeigen die theoretischen und experimentellen Ergebnisse im allgemeinen keine Übereinstimmung. In diesen Fällen ist die Vernachlässigung der Rekombination im Übergangsgebiet nicht zulässig, denn der durch sie bedingte Strom wächst mit abnehmender Eigenleitungskonzentration n_i , die bei Silicium um den Faktor 10^3 kleiner ist als bei Germanium und um so geringer wird, je tiefer die Temperatur ist.

Eine Berücksichtigung der Rekombination im Übergangsgebiet erfolgt bei BERNARD², SAH, NOYCE und SHOCKLEY³ sowie CHEVYCHELOV⁴. Die drei Arbeiten beschränken sich auf p-n-Übergänge, deren

¹ W. SHOCKLEY, Bell. Syst. Tech. J. **28**, 435 [1949].

² M. BERNARD, J. Electronics **2**, 579 [1957].

³ C. T. SAH, R. N. NOYCE u. W. SHOCKLEY, Proc. Inst. Radio Engrs. **45**, 1228 [1957].

⁴ A. D. CHEVYCHELOV, Soviet Phys.-Solid State **1**, 1102 [1960].

elektrochemische Potentiale im Übergangsgebiet als konstant angesehen werden können, was nach BERNARD bei hinreichend großen Diffusionslängen und entsprechend geringer Rekombination der Fall ist. Die berechneten Strom–Spannungs-Charakteristiken zeigen weitgehende Übereinstimmung, obwohl verschiedene Ansätze für das elektrostatische Potential verwendet sind. Wir können daraus schließen, daß die Potentialform relativ unempfindlich in die Rechnung eingeht.

Der p–n-Übergang bei verschwindender Lebensdauer der Ladungsträger wird von MADELUNG⁵ behandelt. Die Rekombination ist unendlich hoch, so daß die elektrochemischen Potentiale für Elektronen und Löcher zusammenfallen. Das Verfahren, nach dem die Strom–Spannungs-Charakteristik ermittelt wird, beruht auf einer Analogie zur SCHOTTKYSCHEN Randschichttheorie. Es liegt der zur SHOCKLEYschen Diffusionstheorie¹ entgegengesetzte Grenzfall vor.

In der vorliegenden Arbeit soll nun untersucht werden, welches Aussehen die Strom–Spannungs-Charakteristiken von p–n-Übergängen haben, die durch die existierenden Theorien nicht beschrieben werden. Insbesondere interessiert die Frage, wie sich die Charakteristiken ändern, wenn die Rekombination zunimmt und so groß wird, daß die Annahme konstanter elektrochemischer Potentiale im Übergangsgebiet nicht mehr gilt. Wir beginnen unsere Untersuchung mit der Berechnung eines geschlossenen Ausdruckes für den Verlauf der elektrochemischen Potentiale in Abhängigkeit von der Ortskoordinate x und haben so die Möglichkeit, in konkreten Fällen durch numerische Auswertung den Gültigkeitsbereich der bestehenden Theorien abzugrenzen. Mit den elektrochemischen Potentialen ist auch die Strom–Spannungs-Abhängigkeit in geschlossener Form gegeben. Um zu quantitativen Ergebnissen zu kommen, betrachten wir speziell einen symmetrischen p–n-Übergang. Wir führen einen Parameter α ein, der von der angelegten Spannung V und der Diffusionslänge L abhängt. Das Produkt αV ist als eine über die Ortskoordinate x gemittelte Aufspaltung der elektrochemischen Potentiale im Übergangsgebiet definiert. Wir bestimmen α in seiner funktionalen Abhängigkeit aus einer Randbedingung, der die elektrochemischen Potentiale genügen und sind damit in der Lage, die berechneten Charakteristiken quantitativ zu diskutieren.

I. Allgemeiner Formalismus

a) Schematische Darstellung eines p–n-Übergangs

Für unsere Rechnungen wählen wir ein eindimensionales Modell. Abb. 1 veranschaulicht den p–n-Übergang im Gleichgewicht, Abb. 2 gibt die Verhältnisse unter einer äußeren Spannung $V = v \cdot kT/q$ wieder. Wie in den beiden Abbildungen gezeigt

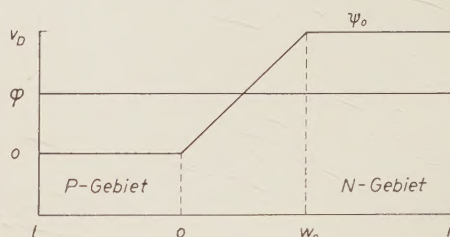


Abb. 1. Der p–n-Übergang im Gleichgewicht.

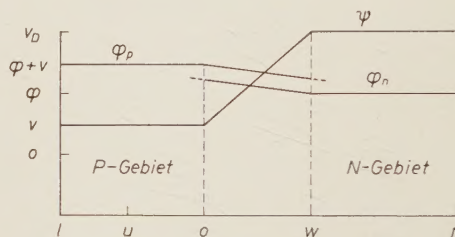


Abb. 2. Der belastete p–n-Übergang.

wird, geht bei Belastung das elektrostatische Potential ψ_0 über in ψ , die Breite w_0 des Übergangsgebietes in w , und das FERMI-Potential φ spaltet auf in die elektrochemischen Potentiale φ_n und φ_p . l sei die linke, r die rechte Begrenzung des Halbleiters. Die Potentiale messen wir als Vielfache von kT/q und bezeichnen sie in ihrer dimensionslosen Schreibweise als reduzierte Potentiale. Dann ist die Dichte der Elektronen gegeben durch

$$n = n_i \exp(\psi - \varphi_n), \quad (1)$$

die der Löcher durch

$$p = n_i \exp(\varphi_p - \psi), \quad (2)$$

n_i ist die Eigenleitungskonzentration.

Für das P-Gebiet gilt: Die Dichte der Löcher ändert sich bei Belastung praktisch nicht. Dann muß nach (2) $\varphi_p - \psi = \varphi - \psi_0$ sein. Da in unserer Darstellung $\psi = \psi_0 + v$ ist, muß $\varphi_p = \varphi + v$ werden. Die Dichte der Elektronen ist dagegen in einem Gebiet $u \leq x \leq 0$ von der Spannung abhängig. Wir wählen $|l|$ so groß, daß $n(l)$ den Gleichgewichtswert n_p behält. Dann gilt: $\varphi_n(l) = \varphi_p(l) = \varphi + v$. Analoge

⁵ O. MADELUNG, Z. Naturforschg. **12 a**, 1020 [1957].

Verhältnisse herrschen im N-Gebiet: Es gilt $\psi = \psi_0$, $\varphi_n = \varphi$ und, indem wir r hinreichend groß wählen, $\varphi_p(r) = \varphi_n(r) = \varphi$. In den betrachteten Abbildungen haben wir den Potentialverlauf im Übergangsgebiet linear approximiert. Diese Näherung werden wir unserer Arbeit zugrunde legen.

b) *Integration der Differentialgleichungen für die elektrochemischen Potentiale $\varphi_n(x)$ und $\varphi_p(x)$*

Die Ausgangsgleichungen zur Berechnung der elektrochemischen Potentiale φ_n und φ_p lauten:

$$j_n = D_n n \varphi_n', \quad j_n' = -U; \quad (3), (4)$$

$$j_p = -D_p p \varphi_p', \quad j_p' = -U. \quad (5), (6)$$

Der Index n charakterisiert die Elektronen, der Index p die Löcher. j_n , j_p sind die Teilchenstromdich-

ten, D_n und D_p die Diffusionskonstanten, n ist die Elektronendichte, p die Löcherdichte. Mit U bezeichnen wir die Rekombinationsquote, die unter stationären Bedingungen für Elektronen und Löcher gleich ist.

Im folgenden berechnen wir ausgehend von den Gln. (3) und (4) das elektrochemische Potential φ_n . Wir setzen (1) in (3) ein, eliminieren j_n aus (3) und (4) und substituieren

$$y_n = \frac{d}{dx} e^{-\varphi_n}. \quad (7)$$

Dann erhalten wir die Differentialgleichung

$$y_n' + f(x) \cdot y_n = g(x) \quad (8)$$

mit den Abkürzungen

$$f(x) = \psi', \quad g(x) = U e^{-\psi} / (D_n n_i). \quad (9)$$

Die Lösung lautet:

$$y_n(x) = \exp \left\{ - \int_a^x f(t) dt \right\} \cdot \left[y_n(a) + \int_a^x g(u) \cdot \exp \left\{ \int_a^u f(t) dt \right\} du \right]. \quad (10)$$

Durch Integrieren und Logarithmieren von (7) finden wir

$$\varphi_n(x) = \varphi_n(b) - \ln \left[1 + \exp \{ \varphi_n(b) \} \int_b^x y_n(\xi) d\xi \right]. \quad (11)$$

Drücken wir die in (10) auftretende Integrationskonstante $y_n(a)$ durch Größen mit unmittelbarer physikalischer Bedeutung aus und ersetzen $f(x)$ und $g(x)$ wieder durch die ursprünglichen Funktionen, so folgt:

$$y_n(x) = -e^{-\psi(x)} / (D_n n_i) \cdot \left[j_n(a) - \int_a^x U(t) dt \right]. \quad (12)$$

Die Berechnung von $\varphi_p(x)$, ausgehend von den Gln. (5) und (6), läuft vollkommen analog und liefert

$$\varphi_p(x) = \varphi_p(\bar{b}) + \ln \left[1 + \exp \{ -\varphi_p(\bar{b}) \} \int_{\bar{b}}^x y_p(\xi) d\xi \right], \quad (13)$$

$$y_p(x) = -e^{\psi(x)} / (D_p n_i) \cdot \left[j_p(\bar{a}) - \int_{\bar{a}}^x U(t) dt \right]. \quad (14)$$

Die Gln. (11) bis (14) gelten ganz allgemein. Sie enthalten weder vereinfachende Ansätze noch spezielle Annahmen.

c) *$\varphi_n(x)$ im P-Gebiet, $\varphi_p(x)$ im N-Gebiet*

Wir ersetzen in (11) b und in (12) a durch die linke Begrenzung des Halbleiters, deren Koordinatenwert wir l genannt haben. $|l|$ ist nach Voraussetzung so groß, daß $j_n(l) = 0$ wird. Dann folgt aus (12):

$$y_n(x) = e^{-\psi(x)} / (D_n n_i) \cdot \int_l^x U(t) dt. \quad (15)$$

Im P-Gebiet ist die Rekombinationsquote $U(x)$ proportional zur Abweichung der Elektronendichte von ihrem Gleichgewichtswert, vorausgesetzt, daß diese klein gegen die Löcherdichte bleibt:

$$U(x) = (n(x) - n_p) / \tau_n, \quad x \leq 0; \quad (16)$$

τ_n ist die Lebensdauer der Elektronen im P-Gebiet.

$n(x) - n_p$ berechnen wir aus den Gln. (3) und (4), indem wir den Feldstrom neben dem Diffusionsstrom vernachlässigen. Damit haben wir $U(x)$ und finden:

$$y_n(x) = e^{-\psi(x)/(L_n n_i)} \{n(0) - n_p\} \exp \{x/L_n\}, \quad (17)$$

$$\varphi_n(x) = \varphi_n(l) - \ln \left\{ 1 + \left[\frac{n(0)}{n_p} - 1 \right] \cdot \exp \{x/L_n\} \right\} \quad \text{für } x \leq 0 \quad (\text{P-Gebiet}). \quad (18)$$

Wir haben $D_n \tau_n = L_n^2$ gesetzt. L_n ist die Diffusionslänge der Elektronen im P-Gebiet. Bei den vorkommenden Integrationen haben wir die untere Integrationsgrenze l durch $-\infty$ ersetzt. Außerdem haben wir das im P-Gebiet nahezu konstante Potential $\psi(x)$ durch $\psi(l)$ approximiert.

In vollkommen analoger Weise berechnet sich $\varphi_p(x)$ im N-Gebiet. Wir erhalten das Ergebnis:

$$\varphi_p(x) = \varphi_p(r) + \ln \left\{ 1 + \left[\frac{p(w)}{p_n} - 1 \right] \cdot \exp \{-(x-w)/L_p\} \right\} \quad \text{für } x \geq w \quad (\text{N-Gebiet}); \quad (19)$$

L_p ist die Diffusionslänge der Löcher im N-Gebiet.

d) $\varphi_n(x)$ im N-Gebiet, $\varphi_p(x)$ im P-Gebiet

Um das elektrochemische Potential $\varphi_n(x)$ im N-Gebiet zu berechnen, ersetzen wir in (11) b und in (12) a durch den Koordinatenwert r der rechten Begrenzung des Halbleiters. r ist entsprechend l so groß vorausgesetzt, daß der Strom an dieser Stelle nur von den Elektronen getragen wird. Wir schreiben $j_n(r) = -j$, dann gilt nach (12):

$$y_n(x) = e^{-\psi(x)/(D_n n_i)} \cdot \left\{ j + \int_r^x U(t) dt \right\}. \quad (20)$$

Im N-Gebiet ist die Rekombinationsquote $U(x)$ proportional zur Abweichung der Löcherdichte von ihrem Gleichgewichtswert, vorausgesetzt, daß diese klein gegen die Elektronendichte bleibt:

$$U(x) = (p(x) - p_n)/\tau_p, \quad x \geq w; \quad (21)$$

τ_p ist die Lebensdauer der Löcher im N-Gebiet.

In Analogie zur Berechnung von $\varphi_n(x)$ im P-Gebiet folgt für das N-Gebiet:

$$\varphi_n(x) = \varphi_n(r) - \ln \left\{ 1 - (1/D_n n_n) \cdot [j(r-x) - D_p(p(w) - p_n) \cdot \exp \{-(x-w)/L_p\}] \right\} \quad (22)$$

für $x \geq w$ (N-Gebiet).

Bei der Durchführung der Rechnung haben wir $\psi(x)$ durch $\psi(r)$ und bei den vorkommenden Integrationen über $\exp \{-(x-w)/L_p\}$ die Integrationsgrenze r durch $+\infty$ ersetzt. Das sind gute Näherungen.

Für $\varphi_p(x)$ im P-Gebiet ergibt sich entsprechend:

$$\varphi_p(x) = \varphi_p(l) + \ln \left\{ 1 - (1/D_p p_p) [j(x-l) - D_n(n(0) - n_p) \exp \{x/L_n\}] \right\} \quad \text{für } x \leq 0 \quad (\text{P-Gebiet}). \quad (23)$$

e) $\varphi_n(x)$ im Übergangsgebiet eines symmetrischen p-n-Übergangs

Die bisherigen Rechnungen konnten wir unter den üblichen Annahmen durchführen, daß die Rekombinationsquote in den Homogengebieten proportional zur Abweichung der Minoritätsträgerdichte von ihrem Gleichgewichtswert ist und daß eben dort der Feldstrom der Minoritätsträger neben ihrem Diffusionsstrom vernachlässigt werden kann. Für alle nun folgenden Überlegungen müssen wir weitere Vereinfachungen vornehmen. Wir beschränken uns auf den symmetrischen p-n-Übergang und

machen Approximationen, auf die wir an gegebener Stelle hinweisen. Da die vorausgesetzte Symmetrie des p-n-Übergangs auch im Verlauf der elektrochemischen Potentiale zum Ausdruck kommt, genügt es, die Funktion $\varphi_n(x)$ zu berechnen. $\varphi_p(x)$ ist dann gleichzeitig gegeben.

Ausgehend von (11) können wir schreiben:

$$\varphi_n(x) = \varphi_n(l) - \ln \left\{ 1 + e^{\varphi_n(l)} \int_l^0 y_n(\xi) d\xi + e^{\varphi_n(l)} \int_0^x y_n(\xi) d\xi \right\}. \quad (24)$$

Der zweite Summand im Argument des Logarithmus läßt sich nach (17) bestimmen. Es bleibt die Auf-

gabe, den dritten Summanden zu berechnen. Nach (12) gilt:

$$y_n(x) = - \frac{e^{-\psi(x)}}{D_n n_i} \left\{ j_n(0) - \int_0^x U(t) dt \right\}. \quad (25)$$

Wir machen die Annahme, daß die Rekombination über Rekombinationszentren erfolge, die energetisch zwischen dem Valenz- und Leitungsband gelegen sind. Für diesen Fall haben SHOCKLEY und READ⁶ den Ausdruck hergeleitet:

$$U = \frac{p n - n_i^2}{(n + n_1) \tau_p + (p + p_1) \tau_n}; \quad (26)$$

n_1 ist die Dichte der Elektronen im Leitungsband, wenn das FERMI-Niveau mit dem Niveau der Rekombinationszentren zusammenfällt. p_1 ist die entsprechende Dichte der Löcher im Valenzband.

Wegen der Symmetrie des Problems können wir setzen:

$$\begin{aligned} \tau_n &= \tau_p = \tau, & D_n &= D_p = D, & (27) \\ n(0) &= n_p e^{\alpha v}; & n(w) &= n_n; \\ p(w) &= p_n e^{\alpha v}; & p(0) &= p_p; \\ n(x) &= p(w - x); \end{aligned}$$

α ist ein später zu bestimmender Parameter.

Für die folgenden Rechnungen machen wir die Approximation:

$$n p = n_i^2 e^{\varphi_p - \varphi_n} = n(0) p(0) = n(w) p(w) = n_i^2 e^{\alpha v}. \quad (28)$$

Sie beinhaltet, daß wir uns nicht auf konstante

Nach (30) können wir schreiben:

$$\int_0^x U(t) dt = \frac{n_i^2}{\tau} \cdot (e^{\alpha v} - 1) \int_0^x \frac{dt}{n(t) + p(t) + 2 n_i}. \quad (31)$$

Wählen wir n als neue Integrationsvariable und setzen gemäß einer linearen Approximation der Potentiale

$$(\psi - \varphi_n)' = \gamma = \frac{v_D - \alpha v}{w}, \quad \psi' = \kappa = \frac{v_D - v}{w}, \quad (32), (33)$$

so erhalten wir mit (28)

$$\int_0^x U(t) dt = \frac{n_i \sqrt{e^{\alpha v} - 1}}{\gamma \tau} \left\{ \arctan \frac{(n_n/n_i) + 1}{\sqrt{e^{\alpha v} - 1}} - \arctan \frac{n(w-x)/n_i + 1}{\sqrt{e^{\alpha v} - 1}} \right\}. \quad (34)$$

Einsetzen von (34) in (25) und (25) in (24) liefert das gesuchte Ergebnis:

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \varphi_n(l) - \ln \left\{ e^{\alpha v} + \left(\frac{w}{L} \right)^2 \cdot T(x) + \frac{1 - \exp\{-(v_D - v) x/w\}}{v_D - v} \right. \\ &\quad \cdot \left[\left(\frac{w}{L} \right)^2 \frac{n_i}{n_p} \frac{\sqrt{e^{\alpha v} - 1}}{v_D - \alpha v} \cdot \arctan \frac{(n_n/n_i) + 1}{\sqrt{e^{\alpha v} - 1}} + \frac{w}{L} \cdot (e^{\alpha v} - 1) \right] \left. \right\}, \\ T(x) &= - \frac{1}{w} \frac{n_i}{n_p} \frac{\sqrt{e^{\alpha v} - 1}}{v_D - \alpha v} \int_0^x e^{-\kappa \xi} \cdot \arctan \frac{n(w-\xi)/n_i + 1}{\sqrt{e^{\alpha v} - 1}} \cdot d\xi. \end{aligned} \quad (35)$$

⁶ W. SHOCKLEY u. W. T. READ, Phys. Rev. **87**, 835 [1952].

elektrochemische Potentiale im Übergangsgebiet beschränken, sondern auch Fälle mit $|\varphi_p - \varphi_n| < |v|$ erfassen wollen. Die Näherung besteht darin, daß wir α und damit $\varphi_p - \varphi_n$ als unabhängig von der Ortskoordinate ansehen. Legen wir außerdem die energetische Lage der Rekombinationszentren auf die Mitte der verbotenen Zone fest, so gilt:

$$n_1 = p_1 = n_i, \quad (29)$$

und wir erhalten als Rekombinationsquote:

$$U = (n_i^2/\tau) (e^{\alpha v} - 1) \frac{1}{n + p + 2 n_i}. \quad (30)$$

BERNARD², SAH u. a.³ und CHEVYCHELOV⁴ betrachten Fälle, in denen $\alpha = 1$ ist. Wir werden α in Abhängigkeit von der angelegten Spannung v und der Diffusionslänge L bestimmen, um so den Gültigkeitsbereich dieser Theorien abgrenzen zu können. $\alpha = 1$ bedeutet, daß die elektrochemischen Potentiale im Übergangsgebiet konstant sind. Bei hinreichend kleinen Diffusionslängen ist das aber nicht der Fall. Kleine Diffusionslänge heißt große Rekombination. Unser Ziel ist es, zu untersuchen, wie sich die Strom-Spannungs-Charakteristik eines symmetrischen p-n-Übergangs mit zunehmender Rekombination ändert. Insbesondere interessieren die Verhältnisse bei Übergängen, die durch die oben genannten Theorien nicht mehr beschrieben werden. Der Grenzfall $L = 0$ ist, wie in der Einleitung erwähnt wurde, von MADELUNG⁵ behandelt.

(35) beschreibt den Verlauf des elektrochemischen Potentials $\varphi_n(x)$ im Übergangsgebiet. Um $\int_0^x U(t) dt$ zu berechnen, haben wir das elektrostatische Potential und die elektrochemischen Potentiale linear angesetzt. Diese Näherung ist durch die weitgehende Übereinstimmung der Ergebnisse von BERNARD² und SAH u. a.³ mit denen CHEVYCHELOVS⁴ gerechtfertigt. Der Parameter α in Abhängigkeit von v und L ist durch die Randbedingung

$$\varphi_n(w) = \varphi_n(r) \quad (36)$$

zu bestimmen. Die Breite w des Übergangsgebietes wird im folgenden Kapitel als Funktion von v und α berechnet. (36) gilt nicht exakt, der Fehler läßt sich aber im Einzelfall nach Gl. (22) abschätzen. Er erweist sich in unserem numerischen Beispiel in weiten Grenzen als vernachlässigbar klein.

f) Die Breite w des Übergangsgebietes in Abhängigkeit von der angelegten Spannung v und dem Parameter α

In Gl. (35) ist das elektrochemische Potential $\varphi_n(x)$ für das Übergangsgebiet gegeben. Parameter sind α , v , L und w . Wie die folgende Rechnung ergibt, ist w seinerseits eine Funktion von v und α . Diese funktionale Abhängigkeit müssen wir kennen, um aus Bedingung (36) α als Funktion von v und L berechnen zu können.

Das elektrostatische Potential ψ , gemessen in der Einheit kT/q genügt der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{q}{kT} \frac{q}{\varepsilon \varepsilon_0} \{p - n + N_D - N_A\}. \quad (37)$$

N_D ist die Dichte der Donatoren, N_A die der Akzeptoren, ε ist die relative Dielektrizitätskonstante, ε_0 die Influenzkonstante. Die Elektronendichte n und die Löcherdichte p sind durch die Relationen (1) und (2) gegeben.

Wir berechnen unter Verwendung der bereits benutzten linearen Potentialansätze:

$$p - n = -2n(0) e^{\gamma w/2} \sinh \gamma (x - w/2). \quad (38)$$

Beschränken wir uns wieder auf den symmetrischen p-n-Übergang, dann genügt es, das Potential ψ im Gebiet $0 \leq x \leq w/2$ zu betrachten. Außerdem sei der Übergang abrupt, so daß gilt:

$$N_D = 0 \text{ und } N_A = n_n \text{ für } x \leq w/2. \quad (39)$$

Mit den Randbedingungen

$$\psi'(0) = 0, \quad \psi(0) = v \quad (40), (41)$$

erhalten wir durch Integration der Diff.-Gl. (37):

$$\psi(x) = \frac{1}{2} f x^2 + g \left\{ \frac{1}{\gamma^2} \sinh \gamma \left(x - \frac{w}{2} \right) - \frac{x}{\gamma} \cosh \gamma \frac{w}{2} + \frac{1}{\gamma^2} \sinh \gamma \frac{w}{2} \right\} + v \quad (42)$$

für $0 \leq x \leq w/2$

$$\text{mit} \quad f = \frac{q}{kT} \frac{q}{\varepsilon \varepsilon_0} n_n, \quad (43)$$

$$g = \frac{q}{kT} \frac{q}{\varepsilon \varepsilon_0} 2n(0) e^{\gamma w/2}, \quad (44)$$

$$\gamma = \frac{v_D - \alpha v}{w} = \frac{b}{w}, \quad (45)$$

$$n(0) = n_p e^{\alpha v}. \quad (46)$$

Die Bedingung

$$\psi(w/2) = v + \frac{1}{2}(v_D - v) \quad (47)$$

liefert w in Abhängigkeit von v und α :

$$v_D - v = w^2 \left\{ \frac{1}{4} f - \frac{1}{b} g \cosh \frac{b}{2} + \frac{2}{b^2} g \sinh \frac{b}{2} \right\}. \quad (48)$$

Damit haben wir w als Funktion von v und α berechnet. Der Klammerausdruck hängt nur von αv ab, wie wir bei Einsetzen der Abkürzungen (43) bis (46) erkennen. Setzen wir $w = w(v, \alpha)$ in (35) ein, dann können wir nach (36) $\alpha = \alpha(v, L)$ bestimmen.

g) Die Gesamtstromdichte i

Zur Berechnung der Gesamtstromdichte i greifen wir zurück auf die Gln. (3), (5) und erhalten:

$$i = -q j_n + q j_p = q \{ -D_n n \varphi_n' - D_p p \varphi_p' \}. \quad (49)$$

Bilden wir nach (11) und (13) die Ableitungen φ_n' und φ_p' , so folgt

$$i = q \left\{ -j_n(0) + j_p(w) + \int_0^w U(t) dt \right\}. \quad (50)$$

Dieser Ausdruck für die Stromdichte i ist von allgemeiner Gültigkeit. Die beiden ersten Summanden entsprechen dem SHOCKLEYSchen Grenzfall geringer Rekombination¹; mit dem Integral über U wird der Beitrag der Rekombination im Übergangsgebiet hinzugefügt.

Beschränken wir uns wieder auf den symmetrischen p-n-Übergang, so gelten die Beziehungen:

$$-j_n(0) = j_p(w), \quad (51)$$

$$n(0) = n_p e^{\alpha v}, \quad (52)$$

$$D_n = D_p = D, \quad L_n = L_p = L. \quad (53)$$

$j_n(0)$ berechnet sich aus (3) und (4) bei Vernachlässigung des Feldstromes. Wir erhalten das Ergebnis:

$$i = q \left\{ 2 \frac{D}{L} n_p (e^{\alpha v} - 1) + \int_0^w U(t) dt \right\}. \quad (54)$$

Das Integral über die Rekombinationsquote U ist mit der Approximation linearer Potentiale in (34) gegeben. Haben wir nach (36) zusammen mit (48) den Parameter $\alpha = \alpha(v, L)$ bestimmt, so können wir aus (54) die Strom-Spannungs-Charakteristik eines symmetrischen p-n-Übergangs zu vorgegebener Diffusionslänge L ermitteln. Die Breite w des Übergangsgebietes ist Gl. (48) zu entnehmen. Wir werden im folgenden diese allgemeinen Überlegungen auf ein spezielles Beispiel anwenden.

II. Numerische Behandlung eines speziellen p-n-Übergangs, Anwendung des allgemeinen Formalismus

Wir haben den allgemeinen Formalismus bereits insofern spezialisiert, als wir uns bei der Berechnung der elektrochemischen Potentiale und des elektrostatischen Potentials im Übergangsgebiet auf den abrupten symmetrischen p-n-Übergang beschränkt haben. Unserer numerischen Betrachtung legen wir folgenden Zahlenwert zugrunde:

$$n_n/n_i = n_i/n_p = 10^5. \quad (55)$$

Die reduzierte Diffusionsspannung v_D berechnet sich dann zu

$$v_D = \ln(n_n/n_p) = \ln 10^{10} = 23,0259, \quad (56)$$

was gleichbedeutend ist mit

$$V_D = 0,60 \text{ Volt}. \quad (57)$$

Diese Zahlenangaben genügen vorerst.

a) Ermittlung des Parameters α in Abhängigkeit von v für vorgegebenes L

Wir lösen die gestellte Aufgabe, indem wir zunächst den Quotienten w/L als Funktion von α und v berechnen, dann w_0/w ermitteln und durch Produktbildung w_0/L erhalten. w_0 ist die Breite des Übergangsgebietes im unbelasteten Fall. Zur Durchführung dieses Programms setzen wir in (35) $x=w$. Dann liefert die Randbedingung (36) eine quadratische Bestimmungsgleichung für den Quotienten w/L . Da w/L positiv sein muß, ist die Lösung eindeutig. Den Quotienten w_0/w berechnen wir nach

Gl. (48); sie ist ebenfalls eine quadratische Bestimmungsgleichung. Setzen wir

$$w_0/L = 1/\lambda, \quad (58)$$

so ist λ die Diffusionslänge, gemessen in der Einheit w_0 . Wählen wir je eine Folge von α -Werten und eine Folge von v -Werten, so können wir λ als Funktion von v für die verschiedenen α darstellen. Damit kennen wir auch α als Funktion von v für festes λ .

Wir wollen uns in unserem Beispiel auf positive Spannungen v beschränken, den p-n-Übergang also bei Flußbelastung untersuchen. Da unsere Theorie auf der Voraussetzung aufbaut, daß die Rekombinationsquote U in P- und N-Gebiet proportional zur Abweichung der Minoritätsträgerdichten von ihrem Gleichgewichtswert sei, kann sie nur gelten, wenn diese Forderung erfüllt ist. Sie ist erfüllt, solange die Minoritätsträgerdichte klein bleibt gegen die Majoritätsträgerdichte, was gleichbedeutend ist damit, daß die angelegte Spannung v eine obere Grenze nicht überschreitet. Diese Grenze ist natürlich nicht scharf definiert. Nehmen wir an, daß

$$n(0) = n_p e^{\alpha v} \leq n_n/100 \quad (59)$$

sei, so ergibt sich

$$v \leq 18,4/\alpha, \quad \alpha \leq 1. \quad (60)$$

Wir können also sagen, daß unsere Theorie bis zu einer Spannung $V = 18,4 (kT/q) \simeq 0,5$ Volt gelten muß.

Der Parameter α ist in dem Bereich $0 \leq \alpha \leq 1$ zu wählen. $\alpha = 1$ bedeutet, daß die elektrochemischen

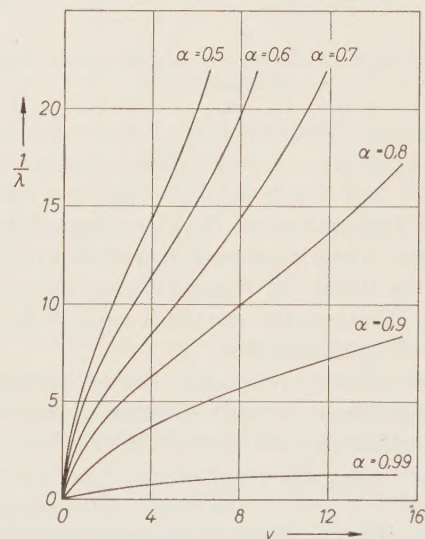
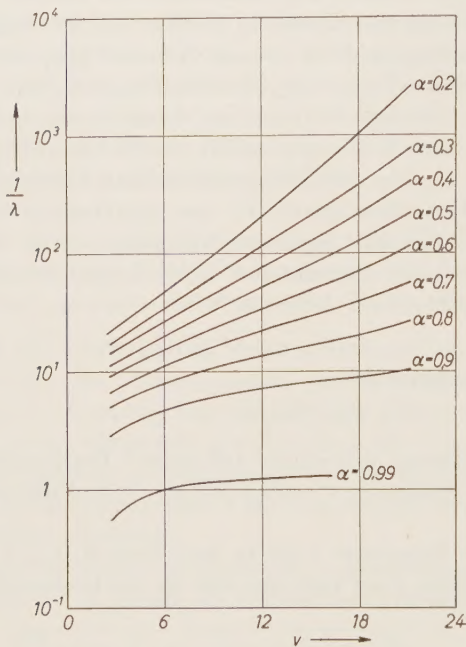


Abb. 3. $1/\lambda$ als Funktion von v (Parameter α).

$\alpha \backslash v$	3	6	9	12	15	18	21
0,2	23,9	47,6	95,4	203	444	1030	2550
0,3	18,6	33,9	63,0	116	209	376	762
0,4	15,5	25,1	44,6	76,4	128	214	401
0,5	12,0	20,0	32,1	51,2	80,2	124	214
0,6	9,75	15,2	23,3	34,2	49,4	70,2	111
0,7	7,14	11,3	16,1	22,4	29,7	38,8	55,7
0,8	5,32	8,07	10,8	13,7	16,9	20,2	26,0
0,9	3,11	4,75	6,06	7,26	8,24	9,00	10,2
0,99	0,60	1,00	1,15	1,20	1,30		

Tab. 1. $1/\lambda$ in Abhängigkeit von v und α .Abb. 4. $1/\lambda$ als Funktion von v in logarithmischer Darstellung (Parameter α).

Potentiale im Übergangsgebiet konstant bleiben und ihre Aufspaltung v beträgt. Dieser Fall wurde von BERNARD² und SAH u. a.³ behandelt und entspricht geringer Rekombination im Übergangsgebiet. CHEVYCHELOVS⁴ Theorie hat noch spezielleren Charakter. Nimmt die Größe der Rekombination zu, so nimmt α ab, und im Grenzfall unendlich hoher Rekombination⁵ muß α verschwinden.

Die berechneten reziproken Diffusionslängen $1/\lambda$ zu vorgegebenen v - und α -Werten stellen wir in Tab. 1 zusammen; wir veranschaulichen $1/\lambda$ in Abhängigkeit von v für verschiedene Parameterwerte α in den Abb. 3 und 4. Aus diesen Abbildungen läßt sich α als Funktion von v für vorgegebenes λ entnehmen.

b) Strom – Spannungs-Charakteristiken

Wir haben die Stromdichte i als Funktion von v in Gl. (54) angegeben. Das Integral über die Rekombinationsquote U ist in (34) berechnet. Setzen wir (34) mit $x=w$ in (54) ein, so erhalten wir

$$i = i_0(d + r) \quad (61)$$

mit den Abkürzungen:

$$i_0 = (2 q n_p D / w_0) \cdot 10^8,$$

$$d = (1/\lambda) (e^{\alpha v} - 1) \cdot 10^{-8},$$

$$r = \frac{1}{\lambda^2} \frac{w}{2 w_0} \frac{\sqrt{e^{\alpha v} - 1}}{v_D - \alpha v} \cdot \left\{ \arctan \frac{(n_n/n_i) + 1}{\sqrt{e^{\alpha v} - 1}} - \arctan \frac{(n_p/n_i) e^{\alpha v} + 1}{\sqrt{e^{\alpha v} - 1}} \right\} \cdot 10^{-3}.$$

i_0 ist eine geeignet gewählte Stromdichteneinheit. d ist der Diffusionsanteil, r der Rekombinationsanteil des Stromes in der Einheit i_0 .

Fügen wir zu dem Zahlenwert (55) den Wert

$$n_p = 10^5 \text{ cm}^{-3} \quad (62)$$

hinzu, so berechnen wir für Silicium mit $\varepsilon = 11,7^7$ und $k T/q = 25,9 \cdot 10^{-3}$ Volt nach (48)

$$w_0 = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ cm} \quad (63)$$

und mit $D = 20 \text{ cm}^2/\text{s}$ nach (61)

$$i_0 = 0,5 \text{ A/cm}^2. \quad (64)$$

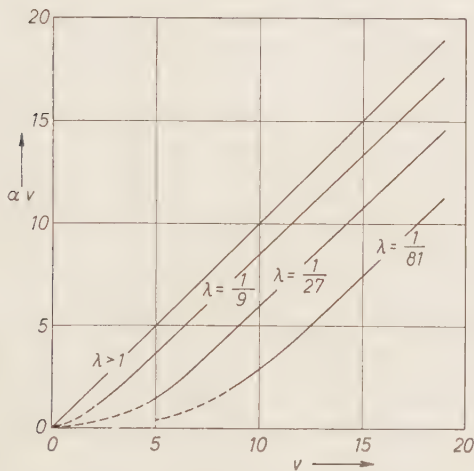
Unser Ziel ist es, die Stromdichte i in Abhängigkeit von v für verschiedene Werte des Parameters λ zu ermitteln. Betrachten wir (61), so sehen wir, daß v und α nie allein, sondern stets als Produkt auftreten. Es ist daher sinnvoll, zunächst αv als Funktion von v zu bestimmen. Ausgehend von den Abb. 3 und 4 erhalten wir die in Tab. 2 zusammengestellten Werte. Die Veranschaulichung des Produktes αv in Abhängigkeit von v finden wir in Abb. 5. λ ist Parameter.

⁷ W. C. DUNLAP u. R. L. WATERS, Phys. Rev. **92**, 1396 [1953].

$\lambda \backslash v$	≥ 1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$
2,0	2,0	1,05		
3,0	3,0	1,86		
4,5	4,5	3,21	1,20	
6,0	6,0	4,63	2,24	
7,5	7,5	6,08	3,56	
9,0	9,0	7,54	5,00	2,12
10,5	10,5	9,03	6,44	3,31
12,0	12,0	10,48	7,92	4,56
15,0	15,0	13,38	10,80	7,50
18,0	18,0	16,20	13,64	10,35

Tab. 2. αv in Abhängigkeit von v und λ .

λ	$0,5 \cdot 10^5$	27	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{27}$
$\nu(\lambda)$	11	6	4	2	0

Tab. 3. ν in Abhängigkeit von λ .Abb. 5. αv als Funktion von v (Parameter λ).

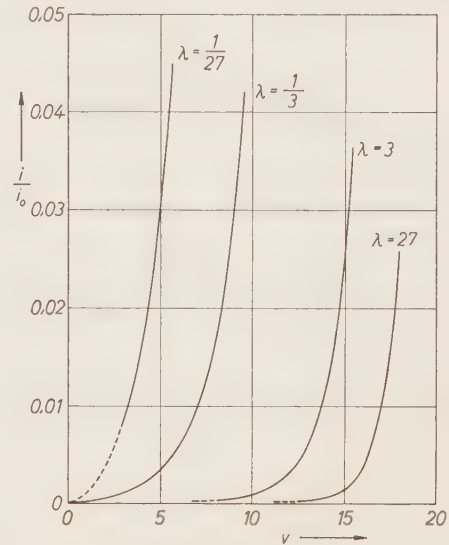
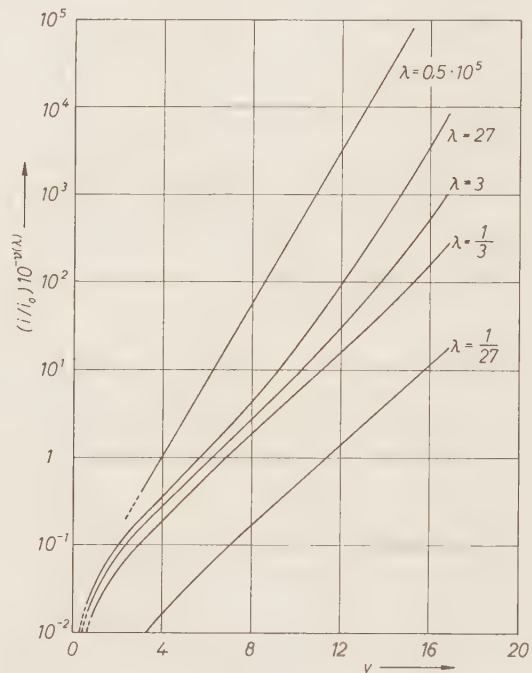
Nach Gl. (61) können wir nun i bei fest vorgegebenem λ für eine Folge von αv -Werten berechnen. Aus Kurven entsprechend Abb. 5 finden wir die zugehörigen Spannungen v und sind somit in der Lage, die gesuchten Strom-Spannungs-Charakteristiken darzustellen. Das geschieht in den Abb. 6 und 7 für die Diffusionslängen

$$\lambda = 0,5 \cdot 10^5; 27; 3; \frac{1}{3}; \frac{1}{27}.$$

In Abb. 7 ist zu beachten, daß $(i/i_0) \cdot 10^{-\nu(\lambda)}$ als Ordinate aufgetragen ist, wobei der Exponent ν gemäß Tab. 3 von λ abhängt. Für die nachfolgende Diskussion geben wir in den drei Tabellen 4, 5 und 6 für

$$\lambda = 0,5 \cdot 10^5; \quad \lambda = 27; \quad \lambda = \frac{1}{27};$$

die zu vorgegebenen Spannungen v gehörigen Stromdichten d , r und $i/i_0 = d + r$.

Abb. 6. Die Stromdichte i als Funktion der reduzierten Spannung v (Parameter $\lambda = L/w_0$).Abb. 7. Die Stromdichte i als Funktion der reduzierten Spannung v in logarithmischer Darstellung (Parameter $\lambda = L/w_0$).

c) Diskussion der Ergebnisse

Die bisher existierenden Arbeiten¹⁻⁵ zur Theorie des p-n-Übergangs haben einen begrenzten Gültig-

keitsbereich. Insbesondere kann die Annahme konstanter elektrochemischer Potentiale^{2,3} im Übergangsgebiet nur für hinreichend große Diffusionslängen λ erfüllt sein. In der vorliegenden Arbeit

v	d [10 ⁻¹¹]	r [10 ⁻¹¹]	$d+r$ [10 ⁻¹¹]
0,60	0,0164	0,0006	0,0170
1,20	0,0464	0,0014	0,0478
2,10	0,143	0,003	0,146
3,00	0,382	0,006	0,388
4,20	1,31	0,01	1,32
6,30	10,9	0,0 (2)	10,9
8,10	65,9		65,9
10,80	980		980
12,60	5930		5930
14,40	35900		35900
16,20	217000		217000

Tab. 4. $d, r, d+r$ als Funktion von v ; $\lambda=0,5 \cdot 10^5$.

v	d [10 ⁻⁶]	r [10 ⁻⁶]	$d+r$ [10 ⁻⁶]
0,60	0,0003	0,0202	0,0205
1,20	0,0009	0,0465	0,0474
2,10	0,003	0,102	0,105
3,00	0,007	0,190	0,197
4,20	0,024	0,396	0,420
6,30	0,20	1,28	1,48
8,10	1,22	3,44	4,66
10,80	18,2	15,3	33,5
12,60	110	41	151
14,40	664	115	779
16,20	4020	330	4350

Tab. 5. $d, r, d+r$ als Funktion von v ; $\lambda=27$.

v	d	r	$d+r$
3,25		0,0101	0,0101
4,50		0,0227	0,0227
5,80		0,0492	0,0492
6,89		0,0907	0,0907
8,16		0,186	0,186
10,34		0,593	0,593
12,20	0,00	1,56	1,56
15,00	0,02	6,57	6,59
16,88	0,1	16,9	17,0

Tab. 6. $d, r, d+r$ als Funktion von v ; $\lambda=1/27$.

stellten wir uns die Frage, wo die Grenze für die Anwendbarkeit der Überlegungen von BERNARD² und SAH u. a.³ zu ziehen sei und machten uns zur Aufgabe, das Aussehen der Strom – Spannungs-Charakteristiken über diese Grenze hinaus zu untersuchen. Wir verfolgten dieses Ziel, indem wir zunächst einen allgemeinen Formalismus zur Theorie des symmetrischen p – n-Übergangs entwickelten. Um

zu quantitativen Aussagen zu kommen, schlossen wir die numerische Behandlung eines speziellen Beispiels an. Die gewonnenen Ergebnisse wollen wir nun im Hinblick auf die unserer Arbeit zugrunde liegende Fragestellung diskutieren.

Gehen wir von den Abbildungen 3 und 4 aus, so finden wir eine Antwort auf die Frage nach dem Gültigkeitsbereich der obengenannten Theorien^{2,3}. Wie wir früher gezeigt haben, ist Voraussetzung für ihre Anwendbarkeit die Beziehung $\alpha=1$. Aus dem Verlauf der berechneten Kurven können wir entnehmen, daß diese Beziehung für $\lambda \geq 1$ in guter Näherung erfüllt ist. Wir können in solchen Fällen $\alpha v=v$ setzen. Der auftretende Fehler wird für $\lambda=1$ am größten; es gilt $v-\alpha v < 0,2$, so daß die Abweichung des durch $e^{\alpha v}$ bestimmten Stromes vom exakten Wert 20% betragen kann. Wir kommen also für unser spezielles Beispiel zu dem Schluß, daß die Arbeiten von BERNARD² und SAH u. a.³ gelten, solange die Diffusionslänge größer ist als die Breite des Übergangsgebietes im Gleichgewicht.

In Abb. 5 haben wir αv als Funktion von v dargestellt. Für $\lambda \geq 1$ gilt nach den vorangegangenen Überlegungen $\alpha v \simeq v$, wir erhalten eine Gerade durch den Nullpunkt. Für Diffusionslängen $\lambda < 1$ ergeben sich Kurven, die bei hinreichend großen Spannungen in guter Näherung durch

$$\alpha v = v - v_0, \quad v_0 > 0 \quad (65)$$

beschrieben werden können, also auch linear sind. Ihre Steigung hat bis auf Abweichungen von wenigen Prozent den Wert 1 in Übereinstimmung mit der Geraden $\alpha v=v$. Es ist bemerkenswert, daß alle dargestellten Kurven mit wachsender Spannung in Parallelen übergehen.

Die ermittelten Strom – Spannungs-Charakteristiken sind in den Abb. 6 und 7 dargestellt. Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß die Stromdichteinheit für jede der Kurven in Abb. 7 eine andere ist, da der Exponent v von der Diffusionslänge λ abhängt, während wir in Abb. 6 übereinstimmend die Einheit i_0 gewählt haben. Aus den Tabellen 4, 5 und 6 ist ersichtlich, daß bei großen Diffusionslängen der Diffusionsanteil d den Rekombinationsanteil r des Stromes überwiegt und daß mit abnehmender Diffusionslänge der Rekombinationsstrom zunehmend an Bedeutung gewinnt. Insbesondere gilt $i/i_0 \simeq d$ für $\lambda=0,5 \cdot 10^5$, während für $\lambda=\frac{1}{27}$ $i/i_0 \simeq r$ wird. Diese Erscheinung wird auch in Abb. 7 deutlich. Der Diffusionsanteil wird durch den Faktor $e^{\alpha v}$, der Rekombinationsanteil durch $e^{\alpha v/2}$ in sei-

ner Spannungsabhängigkeit bestimmt. Nach (65) folgt $e^{av} \sim e^v$ und $e^{av/2} \sim e^{v/2}$ für hinreichend große v , so daß die zu $\lambda = 0,5 \cdot 10^5$ und $\lambda = 1/27$ gehörigen Charakteristiken in logarithmischer Darstellung als Geraden mit um einen Faktor 2 verschiedenen Steigungen erscheinen. Betrachten wir eine Kurve, deren zugeordnete Diffusionslänge zwischen den eben diskutierten Grenzfällen liegt, so sehen wir, daß die Bedeutung des Diffusionsstromes mit zunehmender Spannung zu-, die des Rekombinationsstromes dagegen abnimmt, was ebenfalls in der sich ändernden Steigung zum Ausdruck kommt. Das Ergebnis, daß für kleine Diffusionslängen und

genügend große Spannungen $i \sim e^{v/2}$ wird, steht in Übereinstimmung mit den Überlegungen von MADELUNG⁵ für den Grenzfall $\lambda = 0$ und zeigt, daß diese Beziehung sich nicht nur bei Voraussetzung konstanter elektrochemischer Potentiale im Übergangsbereich²⁻⁴ ergibt; das ist eine Folge von Gl. (65).

Herrn Prof. Dr. O. MADELUNG danke ich für sein förderndes Interesse an der Arbeit, wertvolle Ratschläge und Diskussionen sowie Herrn Obering. H. HOFFMANN für sein freundliches Entgegenkommen bei der Berechnung von Integralen auf einer Rechenanlage der Siemens-Schuckertwerke in Erlangen. Mein Dank gilt auch der Deutschen Forschungsgemeinschaft, die den Start der Arbeit durch eine Sachbeihilfe unterstützt hat.

Lebenslauf

Am 22. März 1935 wurde ich in Oberroßbach, Kreis Oberwesterwald, geboren. Von 1941 bis 1946 besuchte ich die Volksschule. Im Frühjahr 1946 wurde ich in das Gymnasium Philippinum in Weilburg aufgenommen und bestand im März 1955 die Reifeprüfung. Im Sommersemester 1955 begann ich das Studium der Physik an der Philipps-Universität in Marburg. Am 1. 11. 1957 legte ich hier die Diplom-Vorprüfung und am 6. 3. 1961 die Diplom-Hauptprüfung ab. Meine Diplomarbeit schrieb ich bei Herrn Prof. Dr. S. FLÜGGE. Sie befaßt sich mit einem Problem der Molekülphysik. Die vorliegende Arbeit begann ich im April 1961 bei Herrn Prof. Dr. O. MADELUNG. Ich habe während meines Studiums die Universität nicht gewechselt.

